0 724240-1

На правах рукописи

ЛАГОДЮК АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЗАДАЧ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ НЕВРЕМЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА РЕСУРС.

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Казань 2001

Работа выполнена в Казанском государственном техническом университете им. А.Н. Туполева (КАИ)

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор Сиразетдинов Т.К.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор Гунаков А.П.

доктор физико-математических наук, профессор Коннов И.В.

Ведущая организация: Институт проблем информатики академии наук Республики Татарстан (г.Казань)

Защита состоится «25» декабря 2001 г. в 15^00 часов на заседании диссертационного совета Д.212.079.01 в Казанском государственном техническом университете им. А.Н. Туполева по адресу: 420111, ул. К.Маркса, 10

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева

Автореферат разослан «23» ноября 2001 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета П.Г. Данилаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В настоящее время математические методы и моделирование находят все более широкое применение к описанию, прогнозированию и проектированию различных систем и процессов. Многим техническим системам и инженерным объектам требуется обслуживание, например, обслуживание станков, самолетов, их заправка горюче-смазочными материалами, обслуживание заказов и т.д. При моделировании и анализе функционирования таких систем в настоящее время применяются методы сетевого планирования, теории расписаний, теории массового обслуживания и т.п.

Методами решения и анализа задач обслуживания и их математическим моделированием занимались многие отечественные специалисты: Е.С.Вентцель, В.С.Танаев, В.С.Гордон, Т.К.Сиразетдинов, Р.Т.Сиразетдинов, Ш.Д.Амирханов, И.С.Иваненко, В.В.Родионов, и другие. Среди зарубежных авторов можно назвать следующих: Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер и других.

Исследование задач и развитие методов математического моделирования систем обслуживания, к которым относится и тема данной диссертационной работы, является актуальной проблемой современной науки и техники. Как известно, в ряде работ достаточно подробно изучались вопросы использования ресурсов при наложенных ограничениях.

В работе коллектива авторов «Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления»* ставятся две задачи: учета потребности в отдельных видах ресурсов и оптимального распределения ресурса.

В работах Танаева рассматривается аналогичная постановка задачи обслуживания требований, когда в каждый момент времени известно количество складируемого ресурса. Количество имеющегося ресурса задано в виде функции от времени.

Вопросам разрешимости задач обслуживания, которые представляют собой требования выполнить некоторый объем работ за определенный интервал времени, посвящены работы Амирханова Ш.Д., Сиразетдинова Р.Т.

В работах Сиразетдинова Р.Т. дано определение мощности системы как множества всех ее потенциальных возможностей функционирования, формализован процесс функционирования системы, введены понятие располагаемых мощностей, разработан алгоритм решения задачи анализа мощности, основанный на проверке достаточности или недостаточности мощности системы для обеспечения потребной мощности.

*) М.: Статистика, 1977 г., 216 с.

Хотя вопросам формализации, моделирования, и, на их основе, анализу систем обслуживания посвящено значительное количество работ, но остаются не решенными задачи, в которых ограничивающим фактором является невременной ресурс, например горюче-смазочные материалы, вода для технологических целей, денежные средства и т.д. Отличительной особенностью невременных ресурсов является то, что если они не использованы в заданном интервале, остается возможность использования их в любой последующий интервал времени.

Данная диссертационная работа посвящена моделированию и анализу обслуживающих систем, возможности которых на произвольных интервалах времени ограниченны имеющимися ресурсами, как временного, так и невременного характера.

Цель работы. Формализация, разработка математических моделей, и на их основе анализ разрешимости однотипных и многотипных систем обслуживания с ограничениями мощности.

Методы исследований. Для решения поставленных задач использованы теория матриц, матричное исчисление, теория графов, линейное программирование, прикладные математические программы.

Научная новизна. Следующие научные результаты являются новыми:

1. Формализована и дана математическая постановка, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задач обслуживания с невременным ресурсом, то есть когда ресурс или мощность системы при неполном использовании в данном интервале переносится на последующие интервалы времени. Рассмотрены однотипные и многотипные задачи обслуживания.

2. Выполнимость или невыполнимость однотипных работ сведена к решению системы некоторых линейных неравенств, а многотипных работ с ограничениями мощности – к решению системы линейных и нелинейных неравенств.

3. На основе доказанных теорем о необходимых и достаточных условиях выполнимости работ построен алгоритм анализа разрешимости задач обслуживания, как процедуры формирования матриц инцидентности графа, построенного в соответствии с определенными правилами формирования матриц заданной структуры, неизменной для различных вариантов задач обслуживания.

Практическая ценность полученных научных результатов в диссертации состоит в том, что они позволяют разработать инженерные методы и алгоритмы решения задач обслуживания.

Результаты использованы в ЗАО «ЦВ Протек» Протек-10 (г.Казань) и в учебном процессе кафедры УМП Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ.

<u>**Апробация работы.**</u> Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на:

III-й республиканской научно-практической конференции молодых ученых и специалистов;

Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов "Молодежь и экономическая наука". Казань, 1998;

Международной научно-практической конференции "Технология. Инновация. Качество". Казань, 1999;

Всероссийской научно-практической конференции "Проблемы производственного менеджмента: теория и практика" Воронеж, 2001;

Республиканской научно-практической конференции "Интеллектуальные системы и информационные технологии" Казань, 2001.

<u>**Публикации.**</u> Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 4 научных статьях (в журналах «Известия ВУЗов. Авиационная техника», «Вестник КГТУ им.А.Н.Туполева») и в тезисах конференций.

<u>**Структура и объем работы.**</u> Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Объем диссертации 123 страницы машинописного текста, включая 40 рисунков и 4 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование актуальности проблемы, основные научные положения и результаты, краткое изложение диссертации по главам.

<u>**В первой главе**</u> рассматриваются вопросы, связанные с моделированием однотипных задач обслуживания с невременными ограничениями на ресурс. Вводятся понятия работы, объема работы, элементарной задачи обслуживания (ЭЗО), последовательности ЭЗО, задачи обслуживания (ЗО), мощности обслуживания, t,τ-мощности, последовательности t,τ-мощностей.

Определение 1.1. Работой называется действие, которое совершает обслуживающая система над обслуживаемой. Работа это некоторый физический процесс, который характеризуется объемом.

Определение 1.2. Объем работы m - это неотрицательная скалярная величина, которая обладает двумя свойствами: объемы работ m_1 и m_2 складываются m_1+m_2; объем работы m умножается на число αm (α - число) и при выполнении этих двух операций снова получаем объем некоторой работы.

Определение 1.3. Элементарной задачей обслуживания (ЭЗО) Z называется требование выполнить заданный объем работ $m \geq 0$ в сроки, начиная с момента времени $t \geq 0$, и за время не более чем $\tau > 0$. В формализованном виде ЭЗО представляет собой упорядоченную тройку: $z=(m, t, \tau)$, $m \geq 0$, $t \geq 0$, $\tau > 0$.

Определение 1.4. Последовательностью ЭЗО называется некоторое конечное множество упорядоченных троек $Z' = \{z_i\}$, $z_i=(m_i, t_i, \tau_i)$, $i=1,2,\dots,I$ для которых выполняется соотношение: $t_i+\tau_i= t_{i+1}$, $i=1,2,\dots,I$-1, $I \geq 2$. Если $I=i=1$, то последовательность ЭЗО сводится к единственной ЭЗО.

Определение 1.5. Задачей обслуживания (ЗО), называется требование выполнить некоторое конечное множество ЭЗО $Z=\{z_i\}$ вида $z_i=(m_i, t_i, \tau_i)$ $i=1,2,\dots,I$, у которых моменты начала выполнения работ (НВР) и завершения выполнения работ (ЗВР) не обязательно совпадают. В формализованном виде ЗО представляется как множество упорядоченных троек $Z=\{z_i\}$, $z_i=(m_i, t_i, \tau_i)$, $i=1,2,\dots,I$.

Обслуживающая система характеризуется мощностью, т.е. потенциальной возможностью выполнить определенный объем работ над обслуживающей системой.

Определение 1.6. Мощностью обслуживания $Y=(P, t, \tau)$ на интервале $[t, t+\tau]$ называется максимальный объем работ P, который может быть выполнен обслуживающей системой, начиная с момента времени $t \geq 0$, и за время $\tau > 0$.

Такая мощность также называется t, τ-мощностью. Максимальный объем работы P называется величиной мощности.

Определение 1.7. Последовательностью t, τ-мощностей будем называть последовательность объемов работ, который потенциально может выполнить обслуживающая система в течение каждого из прилегающих друг к другу интервалов, т.е. интервалов, у которых момент начала выполнения работ одного совпадает с моментом завершения выполнения работ предыдущего.

Определение 1.8. Пусть известна t, τ-мощность $Y=(P_1, t_1, \tau_1)$. ЭЗО $Z=(m_2, t_2, \tau_2)$ является разрешимой, если выполняются следующие соотношения: $P_1 \geq m_2$, $t_1 \geq t_2$, $t_1+\tau_1 \leq t_2+\tau_2$.

Определение 1.9. Пусть заданы l ЭЗО $Z_i=(m_i,t,\tau)$, $i=1,2,\dots,l$ на одном и том же интервале времени $[t,t+\tau]$. Все эти ЭЗО выполнимы системой с мощностью $Y=(P,t,\tau)$, если выполняется следующее условие: $\sum_{i=1}^{l} m_i \le P$.

Определение 1.10. Последовательность ЭЗО $Z'=\{z_i\}$, $z_i=(m_i,t_i,\tau_i)$, $i=1,2,\dots,l$ выполнима обслуживающей системой с мощностями $Y_i=(P_i,t_i,\tau_i)$, $i=1,2,\dots,l$ тогда и только тогда, когда на интервалах $[t_i,t_i+\tau_i]$ выполняются следующие условия: $m_i \le P_i$, $i=1,2,\dots,l$.

Определение 1.11. Пусть задана мощность подсистемы обслуживающей системы $Y=(P,t,\tau)$ и эта мощность на интервале $[t,t+\tau)$ может быть распределена на произвольные последовательности интервалов $[t_i,t_i+\tau_i)$ следующим образом: $Y=(P_i,t_i,\tau_i)$, $P \ge p_1+p_2+\dots+p_l$, где $\tau_i>0$ и $p_i>0$, $\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_l=\tau$; $t_1+\tau_1=t_2$, $t_i+\tau_i=t_{i+1},\dots$, $t_{l-1}+\tau_{l-1}=t_l$, $t+\tau=t_l+\tau_l$. Тогда ресурс или мощность, обладающие указанным свойством, назовем невременным ресурсом или мощностью.

Смысл этого утверждения заключается в том, что мощность или ресурс P, неиспользованный в начальном интервале может быть использован в последующих интервалах. Если ресурсом является время, то оно этим свойством не обладает.

Правило сложения мощностей на одном интервале. Если для n обслуживающих подсистем заданы t,τ-мощности $Y_1=(P_1,t,\tau)$, $Y_2=(P_2,t,\tau)\dots$ $Y_n=(P_n,t,\tau)$ на одном и том же интервале $[t,t+\tau)$, то суммарная мощность системы равняется: $Y_0=(P_1+P_2+\dots+P_n,t,\tau)$.

Пусть перед обслуживающей системой с невременными ограничениями поставлена ЗО

$$Z=\{z_i\}, \tag{1}$$

где $z_i=(m_i,t_i,\tau_i)$, $i=1,2,\dots,l$.

Левую границу интервала ЭЗО, начинающуюся раньше остальных ЭЗО, входящих в ЗО, обозначим T_0, т.е. $T_0=min\{t_1, t_2,\dots,t_l\}$, остальные несовпадающие границы интервалов в возрастающем порядке обозначим T_s, $s=1,2,\dots,S$, т.е. $T_s<T_{s+1}$, где S - количество несовпадающих границ интервалов, которые не включают начальный момент времени T_0.

Пусть заданы t,τ-мощности $Y_s=(P_s,T_{s-1},T_s-T_{s-1})$, $s=1,2,\dots,S$ рассматриваемой обслуживающей системы на интервалах $[T_{s-1},T_s)$, $s=1,2,\dots,S$. Тогда мощность обслуживающей системы представляется в виде множества S подсистем с мощностями:

$$Y_0=\{Y_s\}, \tag{2}$$

где $Y_s=(P_s,T_{s-1},T_s-T_{s-1})$, $s=1,2,\dots,S$.

Из определения невременного ресурса или мощности следует, что мощность может быть распределена на произвольные последовательности интервалов, при выполнении следующих условий:

$$P_1=\sum_{s=1}^{S} p_{1s}\ ,\ Y_{01}=(P_1,T_0,T_S-T_0);$$

$$P_2=\sum_{s=2}^{S} p_{2s}\ ,\ Y_{02}=(P_2,T_1,T_S-T_1);$$

....

$$P_\alpha=\sum_{s=\alpha}^{S} p_{\alpha s}\ ,\ Y_{0\alpha}=(P_\alpha,T_{\alpha-1},T_S-T_{\alpha-1});$$

....

$$P_S=p_{SS},\ Y_{0S}=(P_S,T_{S-1},T_S). \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} a_{\alpha j}=1 \text{ если } j=1,2,\ldots,\alpha S-\dfrac{(\alpha-1)\alpha}{2}. \\ a_{\alpha j}=0 \text{ если } j=\alpha S-\dfrac{(\alpha-1)\alpha}{2}+1,\ldots,K. \end{cases} \qquad (4)$$

где $\alpha=1,2,\ldots,S$ и матрицу:

$$A=|a_{\alpha j}|,\ \alpha=1,2,\ldots,S,\ j=1,2,\ldots,K. \qquad (5)$$

Тогда для P_s получим выражение:

$$P_s=\sum_{j=1}^{K} a_{\alpha j} q_j\ , \qquad (6)$$

или в векторной форме:

$$P_s=Aq, \qquad (7)$$

где $P_s=[P_1, P_2,\ldots, P_S]^T$, $q=[q_1, q_2,\ldots, q_K]^T$.

Рассмотрим фиксированный интервал $[T_{s-1},T_s)$ и сумму величин всех мощностей, используемых в этом интервале, которую обозначим через P_s^0, $s=1,2,\ldots,S$. Теперь введем мощности:

$$(P_1^0,T_0,T_1-T_0),\text{ где } P_1^0=\sum_{s=1}^{1} p_{s1}\ ;$$

$$(P_2^0,T_1,T_2-T_1),\text{ где } P_2^0=\sum_{s=1}^{2} p_{s2}\ ;$$

....

$$(P_s^0, T_{s-1}, T_s - T_{s-1}),\text{ где } P_s^0 = \sum_{s=1}^{s} p_{ss};$$

....

$$(P_S^0, T_{S-1}, T_S - T_{S-1}),\text{ где } P_S^0 = \sum_{s=1}^{S} p_{sS}, \tag{8}$$

вектор мощности $P^0 = [P_1^0, P_2^0, \ldots, P_S^0]^T$, и обозначения:

$$\begin{cases} b_{\alpha j} = 1 \text{ если } S_j = (T_{s-1}, T_s],\ s = 1,2,\ldots,S. \\ b_{\alpha j} = 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Введя обозначения вида $q_1 = p_{11}$, $q_2 = p_{12}, \ldots, q_j = p_{r\beta}$, $\ldots$, $q_K = p_{SS}$ для компонентов P_s^0 получим выражение:

$$P_s^0 = \sum_{j=1}^{K} b_{\alpha j} q_j,\ \alpha = 1,2,\ldots,S. \tag{10}$$

Введя матрицу B

$$B = |b_{\alpha j}|,\ \alpha = 1,2,\ldots,S,\ j = 1,2,\ldots,K, \tag{11}$$

зависимость (10) запишем в векторной форме:

$$P^0 = Bq. \tag{12}$$

Пусть задана работа $z = \{z_i\}$, $i = 1,2,\ldots,I$, где $z_i = (m_i, t_i, \tau_i)$, $m_i \geq 0$, $t_i \geq 0$, $\tau_i > 0$, которую необходимо выполнить. Объем работы m_i может быть раздроблен на дискретные части по произвольным интервалам. Расположение интервалов $(t_i, t_i + \tau_i)$, на оси времени при различных $i = 1,2,\ldots,I$ произвольное.

Рассмотрим интервалы $(T_{s-1}, T_s]$. Любой интервал $(t_i, t_i + \tau_i]$ содержит по крайней мере один интервал $(T_{s-1}, T_s]$. Введем коэффициенты c_{is} согласно условиям:

$c_{is} = 1$, если $(T_{s-1}, T_s] \subset (t_i, t_i + \tau_i]$,

$c_{is} = 0$, если $(T_{s-1}, T_s] \not\subset (t_i, t_i + \tau_i]$.

Эти коэффициенты образуют некоторую матрицу

$C = |c_{is}|$, $i = 1, 2, \ldots, I$; $s = 1, 2, \ldots, S$.

Пусть m_i - объем работы, который выполняется в интервале $(t_i, t_i + \tau_i]$. Этот интервал включает в себя некоторые из интервалов $(T_{s-1}, T_s]$. Через m_{is} обозначим часть работы m_i, которая выполняется в интервале $(T_{s-1}, T_s]$.

Коэффициенты c_{is} позволяют объемы работ m_i в интервале $(t_i, t_i + \tau_i]$ записать в виде:

$$m_i = \sum_{j=1}^{S} c_{is} m_{is},\ i = 1, 2, \ldots, I. \tag{13}$$

Согласно равенству (13) объем работы m_i представлен как сумма работ

m_{is} в интервале $(T_{s-1}, T_s]$. Суммарный объем работы w_s, которую надо выполнить в интервале $(T_{s-1}, T_s]$ складывается из объемов работ в интервалах, которые образуются пересечением этого интервала $(T_{s-1}, T_s]$ и всех интервалов $(t_i, t_i+\tau_i]$. Учитывая это, сумму объемов всех работ, которые необходимо выполнить в интервале $(T_{s-1}, T_s]$ запишем в виде:

$$w_s = \sum_{i=1}^{I} c_{is} m_{is}\, ,\ s=1,2,\ldots S. \qquad (14)$$

Суммарный объем работ w_s выполняется, если он не превышает величину мощности системы в интервале $(T_{s-1}, T_s]$.

Обслуживающая система с невременными ограничениями на ресурс обладает некоторой мощностью, причем в разных интервалах различной мощностью. Величина мощности в интервале $(T_{s-1}, T_s]$ равняется P_s^0 Тогда мощность обслуживающей системы в этом интервале записывается в виде $(P_s^0, T_{s-1}, T_s - T_{s-1})$. Объем работы w_s представляет величину потребной работы, а P_s^0 - величину располагаемой мощности системы. Потребная работа выполнима, если объем работы w_s не превосходит величины мощности P_s^0. При этом m_{is} представляют некоторые положительные величины (объемы работ). Мощность системы с невременными ограничениям на ресурс неиспользованная на интервале $(T_{s-1}, T_s]$ может быть использована на последующих интервалах.

Теперь рассмотрим условие выполнимости работ располагаемыми мощностями. Для этого величина мощности на соответствующих интервалах должна быть больше или равна объему работ, который необходимо выполнить на этом интервале.

Так как смысл величины m_{is} - объем некоторой работы, а p_{is} - величина мощности в интервале, то $m_{is} \geq 0$, $p_{is} \geq 0$. Иначе теряется смысл работы и мощности.

Теорема. *Для того чтобы ЗО $Z_0=\{z_i\}$, где $z_i=(m_i, t_i, \tau_i)$, $i=1,2,\ldots,I$, была выполнима обслуживающей системой с невременными ограничениями на ресурс с мощностью $Y_0=\{Y_s\}$, где $Y_s = (P_s, T_{s-1}, T_s - T_{s-1})$, $s=1,2,\ldots,S$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные числа m_{is} и p_{is}, для которых выполнялись следующая система равенств и неравенств*:

$$\sum_{s=1}^{k} c_{is} m_{is} = m_i\, ,\ i=1,2,\ldots,I. \qquad (15)$$

$$\sum_{s=1}^{K} a_{is} p_{is} \le P_i \, , \; i=1,2,\ldots,l, \qquad (16)$$

$$\sum_{s=1}^{K} c_{is} m_{is} \le \sum_{s=1}^{K} b_{is} p_{is} = P_i^0 \, , \; i=1,2,\ldots,l. \qquad (17)$$

$$m_{is} \ge 0, \; p_{is} \ge 0. \qquad (18)$$

Обобщая вышесказанное, приведем *общий алгоритм* определения разрешимости ЗО.

1). Задана ЗО вида (1) и мощности вида (2).

2). Вычисляются границы интервалов $[T_{s-1}, T_s)$.

3). Вычисляются коэффициенты c_{is}.

4). Вычисляются коэффициенты c_{is}.

5). Записывается система равенств и неравенств (15) - (18).

6). Решается система равенств и неравенств (15) - (18).

Если решение есть, то величины m_{is}, p_{is} представляют объемы выполняемых работ и величины используемых мощностей на интервалах.

Если решения нет, то необходимо либо увеличивать сроки выполнения, либо увеличивать мощности и повторять пункты с 1 по 7.

Далее теорему о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи обслуживания сформулируем в матричном виде, что является удобной формой для реализации на ЭВМ.

Теорема. *Для того чтобы ЗО $Z_0=\{z_i\}$, где $z_i=(m_i, t_i, \tau_i)$, $i=1,2,\ldots,I$, была выполнима обслуживающей системой с невременными ограничениями на ресурс с мощностью $Y_0=\{Y_s\}$, где $Y_s=(P_s, T_{s-1}, T_s-T_{s-1})$, $s=1,2,\ldots,S$, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор X удовлетворяющий следующим соотношениям* (19) - (22):

$$\Phi_m \times X = M \qquad (19)$$

$$\Phi_p \times X \le 0 \qquad (20)$$

$$A \times X \le P \qquad (21)$$

$$X \ge 0. \qquad (22)$$

Во второй главе рассматриваются вопросы, связанные с моделированием многотипных задач обслуживания и систем обслуживания (МОС) с невременными ограничениями на ресурс. Вводятся понятия t,τ-мощности, работы, объема работы, элементарной задачи обслуживания (ЭЗО), последовательности ЭЗО, задачи обслуживания (ЗО), мощности обслуживания, последовательности t,τ-мощностей.

Определение 2.1. Интервальной или t,τ-мощностью многотипной обслуживающей системы назовем множество $Y=\{Y\}$, где $Y=(P,t,\tau)$, $P=(p^1,p^2,\ldots,p^H)^T$ удовлетворяет неравенствам вида: $F(p^1,p^2,\ldots,p^H) \le R$, $p^h \ge 0$,

$h=1,2,\ldots,H$, где $p^1, p^2,\ldots,p^H$ - компоненты объемов работ каждого типа, R - суммарное значение мощности. Здесь предполагается что F - непрерывная функция, не убывающая по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Таким образом, мощность многотипной обслуживающей системы – это множество таких объемов работ каждого типа, которые можно выполнить за интервал времени $\tau>0$, начиная с момента времени $t\geq 0$, которые представляют некоторую область в l-мерном евклидовом пространстве.

Далее используя понятие t,τ-мощности МОС, введены определения последовательности t,τ-мощностей, многотипной элементарной задачей обслуживания (МЭЗО), последовательности МЭЗО, многотипной задачи обслуживания (МЗО), разрешимости МЭЗО обслуживающей системой, выполнимости последовательности МЭЗО,

Определение 2.9. Пусть задана мощность подсистемы обслуживающей системы $Y=(P,t,\tau)$, $F(p^1,p^2,\ldots,p^H)\leq R$, $h=1,2,\ldots,H$, $p^h\geq 0$ и эта мощность на интервале $[t,t+\tau)$ может быть распределена на произвольные последовательности интервалов $[t_i,t_i+\tau_i)$ следующим образом: $Y=(P_i,t_i,\tau_i)$, $P^1\geq p_{11}^1+p_{12}^1+\ldots+p_{1l}^1$, $P^1\geq p_{21}^2+p_{22}^2+\ldots+p_{2l}^2,\ldots$, $P^h\geq p_{h1}^h+p_{h2}^h+\ldots+p_{hl}^h$, где $\tau_i>0$ и $p_{hl}^h>0$, $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_l=\tau$; $t_1+\tau_1=t_2$, $t_i+\tau_i=t_{i+1},\ldots$, $t_{l-1}+\tau_{l-1}=t_l$, $t+\tau=t_l+\tau_l$. Тогда ресурс или мощность, обладающие указанным свойством, назовем невременным ресурсом или мощностью.

Правило сложения мощностей на одном интервале. Если для n обслуживающих подсистем заданы t,τ-мощности $Y_1=(P_1,t,\tau)$, $Y_2=(P_2,t,\tau),\ldots$, $Y_n=(P_n,t,\tau)$, где $P_1=(p_1^1, p_1^2,\ldots,p_1^h)$, $P_2=(p_2^1, p_2^2,\ldots,p_2^h)$, $P_n=(p_n^1, p_n^2,\ldots,p_n^h)$, $p_1^1, p_1^2,\ldots,p_1^h$, $p_2^1, p_2^2,\ldots,p_2^h$, $p_n^1, p_n^2,\ldots,p_n^h$ - величины мощности h-того типа работ для n-ой обслуживающей подсистемы, на одном и том же интервале $[t,t+\tau)$, то суммарная мощность системы равняется: $Y_0=(P_1+P_2+\ldots+P_n,t,\tau)$.

Пусть перед многотипной обслуживающей системой с невременными ограничениями поставлена многотипная задача обслуживания:

$$Z_0=\{z_i\}, \tag{23}$$

где $z_i=(M_i,t_i,\tau_i)$, $i=1,2,\ldots,I$, $M_i^T=(m^1,\ m^2,\ldots,m^H)$, $m^h\leq 0$, $h=1,2,\ldots,H$, $[t_i,t_i+\tau_i)$, $i=1,2,\ldots,I$ – интервалы, расположенные произвольно на временной оси. Эту задачу назовем общей МЗО.

Левую границу интервала МЭЗО, начинающуюся раньше остальных МЭЗО, входящих в ЗО, обозначим T_0, т.е. $T_0=min\{t_1,\ t_2,\ldots,t_l\}$, остальные несовпадающие границы интервалов обозначим T_s, $s=1,2,\ldots,S$, где S - количество несовпадающих границ интервалов, которые не включают начальный момент времени T_0. Пусть заданы t,τ-мощности $Y_s=(P,T_{s-1},T_s-T_{s-1})$, $F(p^1,p^2,\ldots,p^H)\le R$, $p^h\ge 0$, $s=1,2,\ldots,S$ рассматриваемой обслуживающей системы на интервалах $[T_{s-1},T_s)$, $s=1,2,\ldots,S$. Тогда мощность обслуживающей системы представляется в виде множества S подсистем с мощностями:

$$Y_0=\{Y_s\}, \tag{24}$$

где $Y_s=(P,T_{s-1},T_s-T_{s-1})$, $F(p^1,p^2,\ldots,p^H)\le R$, $p^h\ge 0$, $s=1,2,\ldots,S$, $h=1,2,\ldots,H$.

Ранее были введены обозначения вида $q_1=p_{11}$, $q_2=p_{12},\ldots,q_j=p_{r\beta}$, $\ldots$, $q_K=p_{SS}$. В случае многотипных задач обслуживания, по аналогии введем следующие обозначения: $q_1^1=p_{11}^1$, $q_2^1=p_{12}^1,\ldots,q_j^1=p_{r\beta}^1,\ldots,q_K^1=p_{SS}^1$, $q_1^2=p_{11}^2, q_2^2=p_{12}^2,\ldots,q_j^2=p_{r\beta}^2,\ldots,q_K^2=p_{SS}^2,\ldots,q_1^H=p_{11}^H, q_2^H=p_{12}^H,\ldots,$ $q_j^H=p_{r\beta}^H,\ldots,q_K^H=p_{SS}^H$. Было показано, что существует взаимооднозначная зависимость между индексами j и $r\beta$.

Каждому интервалу $[T_{s-1},T_s)$ соответствует величина мощности q_j^h с несколькими значениями индекса j и h. Например, интервалу $[T_0,T_1)$ соответствует один индекс $j=1$, $h=1,2,\ldots,H$ интервалу $[T_1,T_2)$ – два индекса $j=2, j=k+1$, $h=1,2,\ldots,H$, а для $[T_2,T_3)$ $-j=3, j=k+2, j=2k$, $h=1,2,\ldots,H$ и т.д.

Из определения невременного ресурса или мощности для многотипной системы обслуживания следует, что мощность может быть распределена на произвольные последовательности интервалов.

Введя обозначения (1.4) получим H матриц вида:

$$A^h=|a_{\alpha j}^h|,\ \alpha=1,2,\ldots,S, j=1,2,\ldots,K,\ h=1,2,\ldots,H. \tag{25}$$

Тогда для P_S^h получим выражение:

$$P_S^h=\sum_{j=1}^{K}a_{\alpha j}^h q_j, \tag{26}$$

или в векторной форме:

$$P_S^h=A^h q, \tag{27}$$

где $P_S^h=[P_1^1, P_2^1,\ldots,P_S^1,\ldots,P_1^2,P_2^2,\ldots,P_S^2,\ldots,P_1^H,P_2^H,\ldots,P_S^H]^{\mathrm{T}}$, $q=[q_1^1, q_2^1,\ldots,q_K^1,\ldots,q_1^2, q_2^2,\ldots,q_K^2,\ldots,q_1^H, q_2^H,\ldots,q_K^H]^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим фиксированный интервал $[T_{s-1},T_s)$ и сумму величин всех мощностей, используемых в этом интервале, которую обозначим через P_s^{0h}, $s=1,2,\ldots,S$. Теперь введя вектор мощности $P^0=[P_1^{01}, P_2^{01},\ldots,P_S^{01}$,

$P_1^{02}, P_2^{02}, \ldots, P_S^{02}, \ldots, P_1^{0H}, P_2^{0H}, P_S^{0H}]^{\mathrm{T}}$, и обозначения (9) получим для компонентов P_s^{0h} выражение:

$$P_s^{0h} = \sum_{j=1}^{K} b_{\alpha j} q_j^h, \ \alpha=1,2,\ldots,S. \tag{28}$$

В главе I была введена матрица B (11). Тогда зависимость (28) запишем в векторной форме:

$$P_s^{0h} = B^h q^h. \tag{29}$$

Теперь условия выполнимости работы с заданной мощностью запишем в общем случае.

Введем матрицу инцидентности $I = \begin{vmatrix} \varphi_M \\ \varphi_P \end{vmatrix}$, где φ_M и φ_P соответственно верхняя и нижняя часть матрицы инцидентности I, матрицы Φ_m, Φ_p, A и вектора M, P, X. Матрица Φ_m состоит из верхней части φ_M матрицы инцидентности I, дополненной некоторой нулевой матрицей Θ, число столбцов которой равно K, а количество строк равно количеству строк в матрице Φ_M.

Матрица Φ_p состоит из нижней части матрицы инцидентности I, т.е. матрицы φ_P, дополненной соответствующей матрицей $(-B)$, размерностью $S{\times}K$, где матрица B, формируется из единичных матриц, первая из которых имеет размерность $S{\times}S$, у второй- первая строка нули, а последующие формируют матрицу размерности $S\text{-}1{\times}S\text{-}1$ и т.д., а последняя матрица состоит из S-1 нулей и последний элемент единица.

Матрица A с размерностью $S{\times}K$, имеет следующую структуру: первые S элементов единицы, остальные K-S, нули, вторая строка: первые S элементов нули, последующие S-1 единицы, остальные K-S-(S-1), нули, третья: первые S+S-1 элементов нули, последующие S-2 единицы, остальные K-S-(S-1)-(S-2), нули; последняя строка состоит из S-1 нулей, и последний элемент единица.

Вектор M представляет вектор заданных объемов работ, которые необходимо выполнить.

Вектор P является вектором мощности и состоит из величин мощностей, которые заданы. Искомый вектор X состоит из объемов работ, выполняемых на интервалах $[T_{s-1},T_s)$ и K величин мощностей используемых на интервалах $[T_{s-1},T_s)$.

Теорему о разрешимости задачи обслуживания с ограничениями на невременной ресурс сформулируем в следующем виде:

Теорема. *Для того чтобы МЗО* $Z=\{z_i\}$, $z_i=(M_i,t_i,\tau_i)$, $i=1,2,\ldots,I$, $M_i=(m^1, m^2,\ldots,m^H)^T$, $m^h\geq 0$, $h=1,2,\ldots,H$, *была выполнима многотипной обслуживающей системой с невременными ограничениями на ресурс с мощностью* $Y_0=\{Y_s\}$, *где* $Y_s=(P,T_{s-1},T_s-T_{s-1})$, $s=1,2,\ldots,S$, $P=(P^1,P^2,\ldots,P^H)^T$, $p^h\geq 0$, $h=1,2,\ldots,H$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор X удовлетворяющий следующим соотношениям:*

$$\Phi_m \times X=M, \tag{30}$$

$$A\times X\leq P, \tag{31}$$

$$\Phi_p \times X\leq 0, \tag{32}$$

$$X\geq 0, \tag{33}$$

$$F\leq R. \tag{34}$$

Обобщая вышесказанное приведем *общий алгоритм* определения разрешимости ЗО в матричном виде.

1). Задана ЗО вида (23) и мощности вида (24).

2). Вычисляются границы интервалов $[T_{s-1},T_s)$.

3). Строится граф соответствия ЗО и мощностей.

4). Строится матрица инцидентности этого графа $I=\dfrac{\varphi_M}{\varphi_P}$.

5). Строятся матрицы Φ_m, Φ_p, A и вектора M, P, X.

6). Записывается система матричных равенств и неравенств (30), (31), (32) - (34).

7). Решается система(30), (31), (32) - (34).

Если решение есть, то компоненты полученного вектора X представляют объемы выполняемых работ и величины используемых мощностей на интервалах.

Если решения нет, то необходимо либо увеличивать сроки выполнения, либо увеличивать мощности и повторять пункты с 1 по 7.

В третьей главе рассматривается применение полученных результатов к деятельности оптовой фирмы.

Оптовая фирма представляет сложную систему взаимодействующих между собой подсистем, таких как отдел сбыта (ОС), компьютерная система (КС), склад (С), транспортный отдел (ТО), вспомогательные службы и т.д.

Главной целью функционирования оптовой фирмы является своевременная доставка наибольшего ассортимента товаров до конечного потребителя, поэтому мощность оптовой фирмы оценивается по количеству обрабатываемых заказов. Заказ или заявка – это совокупность мероприятий, направленных на прием, сборку, доставку заказа до конечного потребителя. Считается, что заказ принят в момент времени t, и обработан за период времени τ. Обработанным будем считать заказ, который прошел все стадии обработки на оптовой фирме и оказался у потребителя.

Под единицей работы будем понимать обработку одного заказа. Под единицей мощности будем понимать потенциальную возможность по приему и обработке одного заказа в единицу времени.

Мощность отдела сбыта. Пусть в отделе сбыта работают N_O операторов. Под приемом заявки или заказа будем подразумевать набор действий оператора, приводящего к появлению списка заказываемых товаров в электронном виде в компьютерной системе. Время на прием одной заявки будем считать кратным количеству позиций в заявке и обозначим:

$$T_З=\lambda_1 N_n, \tag{35}$$

где $T_З$ - время на прием одной заявки, N_n – количество позиций в заявке, λ_1 - коэффициент, отражающий трудозатраты на прием одной позиции заказа. Различные заявки могут иметь различное количество позиций. Для идентификации коэффициента λ_1 надо определить время $T_З^e$, необходимое для набора одной позиции. Тогда

$$\lambda_1=T_З^e.$$

Пусть $T_{рд}$ продолжительность рабочего дня, $N_з$ - количество принятых заказов за время не превышающее $T_{рд}$, тогда $\sum_{i=1}^{N_з} T_{зi} = \sum_{i=1}^{N_з} \lambda_{1i} N_{ni} \le T_{рд}$, где λ_{1i} – коэффициент отражающий трудозатраты по приему одной позиции для i-го заказа, N_{ni} – количество позиций в i-ом заказе.

Мощность по приемке заказов одного оператора P_o в единицу времени определяется выражением:

$$P_o=\frac{N_з}{T_{рд}}, \tag{36}$$

Мощность для отдела сбыта запишется:

$$M_{ос}=\frac{\sum_{i=1}^{N_O} N_{зi}}{T_{рд}} \tag{37}$$

Мощность компьютерной системы определяется ее быстродействием по обработке информации, а также количеством компьютеров, которое обозначим через $N_к$. Очевидно что чем больше записей в базе данных, тем дольше будет идти обработка данных. Поэтому положим, что время обработки одной заявки пропорционально количеству позиций в ней, то есть

$$T_{об}=\lambda_2 N_n, \tag{38}$$

где λ_2 некоторый коэффициент, отражающий быстродействие по обработке информации. Для идентификации коэффициента λ_2 надо определить время $T^e_{об}$, необходимое для обработки одной позиции. Тогда

$$\lambda_2 = T^e_{об}.$$

Пусть $N_{зк}$ - количество заказов, обработанные компьютером, за время не превышающее $T_{рд}$, тогда $\sum_{i=1}^{N_{зк}} T_{обi} = \sum_{i=1}^{N_{зк}} \lambda_{2i} N_{ni} \le T_{рд}$ или $\le T_{рд}$, где λ_{2i} – коэффициент отражающий трудозатраты по обработке одной позиции для i-того заказа.

Мощность по обработке заказов одного компьютера $P_к$ в единицу времени определяется выражением:

$$P_к = \frac{N_{зк}}{T_{рд}}, \tag{39}$$

Мощность для компьютерной системы запишется:

$$M_к = \frac{\sum_{i=1}^{N_к} N_{зкi}}{T_{рд}} \tag{40}$$

Мощность склада. Обозначим время сборки и проверки заказа через $T_{сп}$. Очевидно, что время сборки и проверки зависит от количества позиций в заявке. Таким образом

$$T_{сп}=\lambda_3 N_n \tag{41}$$

где λ_3 - некоторый коэффициент, отражающий время затраченное на сборку и проверку одной позиции, N_n – количество позиций в заявке. Для идентификации коэффициента λ_3 надо определить время $T^e_{сп}$, необходимое для сборки и проверки одной позиции. Тогда

$$\lambda_3 = T^e_{сп}.$$

Пусть $N_{зсп}$ - количество заказов, обработанные складом, за время не превышающее $T_{рд}$, то есть $\sum_{i=1}^{N_{зсп}} T_{спi} = \sum_{i=1}^{N_{зсп}} \lambda_{3i} N_{ni} \le T_{рд}$, где λ_{3i} – коэффициент отражающий трудозатраты по сборке и проверке одной позиции для i-того заказа.

Мощность по обработке заказов одного сборщика и контролера $P_{сп}$ в единицу времени определяется выражением:

$$P_{сп}=\frac{N_{зсп}}{T_{рд}}. \qquad (42)$$

Тогда мощность для склада запишется:

$$M_c=\frac{\sum_{i=1}^{N_{зсп}} N_{зсп i}}{T_{рд}} \qquad (43)$$

Мощность транспортного отдела. Обозначим время погрузки и доставки заказа через $T_{пд}$. Время погрузки и доставки зависит от объема заявки, то есть от количества позиций в заявке. Таким образом

$$T_{пд}=\lambda_4 N_n \qquad (44)$$

где λ_4 - некоторый коэффициент, отражающий время затраченное на погрузку и доставку одной позиции, N_n -- количество позиций в заявке. Для идентификации коэффициента λ_4 надо определить время $T^e_{пд}$, необходимое для сборки и проверки одной позиции. Тогда

$$\lambda_4=T^e_{пд}.$$

Пусть $T_{рд}$ продолжительность рабочего дня, $N_{зпд}$ - количество заказов, обработанные складом, за время не превышающее $T_{рд}$, то есть $\sum_{i=1}^{N_{зпд}} \lambda_{4i} N_{ni} \le T_{рд}$ или $\sum_{i=1}^{N_{зпд}} T_{пдi} \le T_{рд}$, где λ_{4i} – коэффициент отражающий трудозатраты по погрузке и доставке одной позиции для i-того заказа.

Мощность по обработке заказов одного грузчика и водителя $P_{пд}$ в единицу времени определяется выражением:

$$P_{пд}=\frac{N_{зпд}}{T_{рд}}. \qquad (45)$$

Тогда мощность для транспортного отдела запишется:

$$M_{то}=\frac{\sum_{i=1}^{N_{зсп}} N_{зпдi}}{T_{рд}} \qquad (46)$$

Мощность оптовой фирмы. Работа по обработке заказов происходить круглосуточно изо дня в день. Мощность оптовой фирмы определяется как максимально возможное количество обработанных заказов. Она ограничивается мощностями отдела сбыта, компьютерной системы, склада, транспортного отдела. Так как все службы взаимодействуют друг с другом, и заявка последовательно проходит все отделы, мощность оптовой фирмы определяется как минимальное из мощностей отделов.

Как правило, на оптовых фирмах с целью интенсификации работ, работник не уходит с рабочего места до тех пор, пока полностью не завершит необходимый объем работ. Таким образом, в данном случае можно рассматривать трудовой ресурс как невременной.

На практике наиболее существенным является работа отдела сбыта, так как операторы непосредственно общаются с заказчиками. Если заявка от клиента принята, то рано или поздно она обязательно будет собрана и отправлена заказчикам.

Для более успешной работы фирмы, уменьшения трудозатрат, необходимо чтобы на оптовой фирме через каждый отдел проходило одно и то же количество заказов, то есть соблюдался принцип ритмичности. Но, к сожалению, это не удается выполнить.

Для определения способности фирмы выполнить ту или иную работу при заданных ресурсах необходимо решить систему равенств и неравенств (30), (31), (32)-(34).

Данная система неравенств может быть решена:

1. Сведением к задаче нахождения базисного решения задачи линейного программирования.
2. С помощью прикладного пакета Mathcad или другими методами.

1. Если система имеет решение, то компоненты вектора X показывают выполняемые объемы работ и величины расходуемых мощностей (ресурсов) на каждом интервале, что позволяет оценивать загруженность той или иной службы.

2. Если система не имеет решения, то это означает, что заданный объем работы при существующих мощностях не может быть выполнен. Тогда существуют два пути:

2.1 при сохранении мощности увеличить сроки выполнения работ, что приведет к задержке в доставке товара до конечного потребителя. Если график работы предполагает круглосуточную работу при отсутствии временных заделов, которые позволяют наверстать упущенное, то происходит смещение графика доставки в течение длительного периода времени, что может вызвать недовольство и отток определенного количества клиентов;

2.2 увеличение мощности (ресурса) при фиксированном объеме работ. Данный вариант может быть реализован путем организации работы таким образом, чтобы в период пиковых нагрузок увеличивать количество людских ресурсов.

Рассмотрим *алгоритм* решения ЗО оптовой фирмы в реальном масштабе времени, который состоит из ряда шагов.

1 шаг. Оптовую фирму рассматриваем как многотипную обслуживающую систему, которая выполняет следующие 4 вида работ:

1. Прием заявок;
2. Обработка заявок;
3. Сборка заявок;
4. Доставка заявок

Прием, обработка и доставка каждого заказа характеризуется определенными трудозатратами.

Границы интервалов задания работ проецируем на временную ось. Совпадающие границы принимаем за одну точку, переобозначаем их как $T_0, T_1, \ldots, T_S$, $s=1,2,\ldots,S$ и располагаем в порядке возрастания.

Мощности обслуживающей системы на интервалах $[T_0, T_1)$, $[T_1, T_2), \ldots$, $[T_{S-1}, T_S)$ заданы.

Записываем задачу в формальном виде.

2 шаг. Строиться граф, согласно приведенными во второй главе правилами. Верхние вершины графа символизируют задачи обслуживания, нижние – мощности. Дуги графа, соединяющие вершины, означают какие мощности используются для выполнения задач обслуживания.

3 шаг. Строится матрица инцидентности этого графа:

4 шаг. Верхнюю часть матрицы обозначаем через φ_M, нижнюю – φ_P. Сформируем матрицу Φ_m^0 с использованием матрицы φ_M и некоторой нулевой матрицы. Так как выполняется четыре вида работы, то введем четырехблочную матрицу: $\Phi_m = \left\vdots\, \Phi_m^0 \,\vdots\, \Phi_m^0 \,\vdots\, \Phi_m^0 \,\vdots\, \Phi_m^0 \,\right\vdots$.

5 шаг. Согласно вышеприведенным правилам, строиться матрица A^0, отражающую разложение мощностей по интервалам. Введем еще четырехблочную матрицу: $A = \left\vdots\, A^0 \,\vdots\, A^0 \,\vdots\, A^0 \,\vdots\, A^0 \,\right\vdots$.

6 шаг. Дополнив матрицу φ_P матрицей B, получим матрицу Φ_p^0. Введем четырехблочную матрицу: $\Phi_p = \left\vdots\, \Phi_p^0 \,\vdots\, \Phi_p^0 \,\vdots\, \Phi_p^0 \,\vdots\, \Phi_p^0 \,\right\vdots$.

7 шаг. Теперь используя матрицы Φ_m, Φ_p, A, условия разрешимости запишем в виде: (30), (31), (32)-(34).

8 шаг. Решаем систему (30), (31), (32)-(34).

Если решение есть, то компоненты полученного вектора X представляют объемы выполняемых работ и величины используемых мощностей на интервалах.

Если решения нет, то необходимо либо увеличивать сроки выполнения, либо увеличивать мошности и повторять шаги с 1 по 8.

Этот алгоритм используется для решения задачи о выполнимости работы в течение одной смены. К концу смены могут оставаться не выполненными некоторые работы. Эти работы присоединяются к заказам, собранным для выполнения в последующей смене.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Даны формализованные определения невременного ресурса, t,τ-мощности, последовательности t,τ-мощностей, элементарной задачи обслуживания (ЭЗО), последовательности ЭЗО, задачи обслуживания (ЗО), разрешимости ЭЗО обслуживающей системой, выполнимости последовательности ЭЗО для однотипных и многотипных обслуживаемых и обслуживающих систем с невременными ограничениями.

2. Получены условия разрешимости однотипных задач обслуживания в случае, если необходимый для этого ресурс обслуживающей системы не является временем и может быть перемещен из одного временного интервала в другой в случае его не использования.

3. Дано формальное описание способности обслуживающей системы перераспределять находящийся в ее распоряжении ресурс внутри временного интервала. Данное свойство дополняет свойства, характеризующие обслуживающую систему в случае, если ограничения на ресурс носят временной характер. Доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости задач обслуживания в случае не временных ограничений на ресурс.

4. Сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости многотипных задач обслуживания в случае невременных ограничений на ресурс. Задача сведена к решению системы линейных равенств и неравенств.

5. На основе сформулированной теоремы разработан алгоритм анализа разрешимости задач обслуживания с ограничением на ресурс, как процедуры формирования матриц инцидентности графа, построенного в соответствии с определенными правилами формирования матриц заданной структуры, неизменной для различных вариантов задач обслуживания.

6. Построены модель функционирования оптовой фирмы и алгоритм решения, позволяющий определить выполнимость заданных объемов работ при имеющихся ресурсах.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Матричный алгоритм анализа разрешимости задач обслуживания // Известия ВУЗов. Авиационная техника, 1998, №4, с. 76-79

2. Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Анализ разрешимости однотипных задач обслуживания при невременных ограничениях // Тезисы III

республиканской научно-практической конференции молодых ученых / Казань,1997, с.35

3. Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Выбор равномерного режима выполнения требований в задаче обслуживания // Статьи и тезисы докладов республиканской научной конференции молодых ученых и студентов "Молодежь и экономическая наука". Казань,1998, с.169-170

4. Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Многотипные задачи с невременными ограничениями на ресурс и их применение при анализе технологических процессов // Международная научно-практическая конференция "Технология. Инновация. Качество" / Казань,1999, с.135-136

5. Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Условия разрешимости дискретных задач обслуживания // Вестник Казанского технологического университета, 1999, №2, с.50-53

6. Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Анализ разрешимости однотипных задач обслуживания при невременных ограничениях мощности на примере служб ГСМ // Известия ВУЗов. Авиационная техника, 1999, №3. с. 69-71

7. Лагодюк А.Н. Использование однотипных задач обслуживания с невременными ограничениями на ресурс для анализа производственных процессов // Труды всероссийской научно-практической конференции "Проблемы производственного менеджмента: теория и практика" / Воронеж, 2001, с.120-123

8. Лагодюк А.Н. Моделирование технологических процессов с использованием задач обслуживания // Труды республиканской научно-практической конференции «Интеллектуальные системы и информационные технологии» / Казань: Отечество, 2001, с.72-74

9. Сиразетдинов Т.К., Амирханов Ш.Д., Лагодюк А.Н. Анализ платежеспособности предприятия как задача обслуживания с невременным ограничением на ресурс // Вестник КГТУ им.А.Н.Туполева, 1998, №2, с.50-53

Формат 60х84 1/16. Бумага писчая. Печать офсетная.
Печ.л. 1,25. Усл.печ.л. 1.16. Усл.кр.-отт. 1,16. Уч.-изд. л.1,0.
Тираж 100. Заказ 5156.

Типография Издательства Казанского государственного технического университета
420111, Казань, К.Маркса, 10